PARTISI MATRIKS UNTUK MENGHITUNG NILAI EIGEN
(Bagian I)

Berny Pebo Tomasouw
(Rabu, 12 Februari 2014)

A. PENGANTAR

Pada tulisan kali ini, saya mencoba membahas salah satu konsep yang sangat penting dalam Teori Matriks, yakni nilai eigen dari suatu matriks. Nilai eigen memiliki aplikasi yang cukup luas diantaranya untuk penentuan kestabilan suatu sistem, perhitungan ranking suatu web yang dipakai dalam situs Google, konsep diagonalisasi matriks, masalah pengenalan wajah (konsep eigenface) dan lain-lain.

Pada bagian ini, saya hanya memperlihatkan bentuk-bentuk matriks yang dapat dipartisi sehingga memudahkan kita untuk menghitung nilai eigen. Namun, saya tetap akan memulai dengan konsep dasar dari nilai eigen.

Definisi I.1

Diberikan matriks $A \in M_n(\mathbb{R})$. Skalar λ disebut nilai eigen dari matriks *A*, jika terdapat vektor tak-nol *x* sedemikian sehingga berlaku

$$Ax = \lambda x \qquad \text{(I.1)}$$

Vektor *x* disebut vektor eigen yang berkorespondensi dengan nilai eigen λ.

Untuk menghitung nilai eigen dan vektor eigen dari suatu matriks maka dapat digunakan Persamaan I.1 dari definisi di atas yakni sebagai berikut

$$Ax = \lambda x \;\Rightarrow\; (\lambda I - A)x = 0$$

Ini merupakan SPL homogen ("jika lupa bisa dibaca kembali buku Aljabar Linier Elementer"). Karena vektor *x* haruslah vektor tak-nol, maka saya menginginkan agar solusi SPL homogen tersebut adalah solusi tak-trivial. Suatu SPL homogen memiliki solusi tak-trivial apabila determinan dari matriks koefisiennya bernilai nol. Oleh karena itu SPL homogen $(\lambda I - A)x = 0$ memiliki solusi tak-trivial jika

$$\det(\lambda I - A) = 0 \qquad \text{(I.2)}$$

Persamaan I.2 sering dikenal sebagai persamaan karakteristik a.k.a polinomial karakteristik. Persamaan ini juga yang akan digunakaan untuk menghitung nilai eigen dari matriks *A*.

Namun, menghitung nilai eigen dengan persamaan ini akan sulit jika matriks *A* berukuran sangat besar. Hal ini dikarenakan sangat sulit menghitung determinan dari matriks yang berukuran sangat besar. Untuk itu perlu diketahui bentuk-bentuk matriks seperti apa yang perhitungan determinannya sangat mudah.

Teorema I.1

Determinan dari matriks segitiga atas ataupun matriks segitiga bawah adalah perkalian semua elemen-elemen pada diagonal utama. Dengan kata lain, jika *A* adalah matriks segitiga yang berorde $n \times n$ maka

$$\det(A) = a_{11}a_{22}...a_{nn}$$

Toerema di atas memperlihatkan kemudahan dalam menghitung determinan dari suatu matriks jika matriks tersebut berbentuk segitiga. Sebagai akibatnya, perhitungan nilai eigen pun menjadi mudah. Perhatikan contoh berikut

Contoh I.1

Diberikan $A=\begin{bmatrix}2&1&3\\0&-1&2\\0&0&1\end{bmatrix}$, maka $\det(\lambda I-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-3\\0&\lambda+1&-2\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}$.

Dengan menggunakan Teorema I.1 maka dengan mudah diperoleh

$$\det(\lambda I-A)=0$$

$$(\lambda-2)(\lambda+1)(\lambda-1)=0$$

Jadi nilai eigen dari matriks *A* adalah 2, -1 dan 1. Atau dengan mudah saya katakan bahwa nilai eigen dari matriks *A* adalah elemen-elemen pada diagonal utama matriks *A* tersebut. Secara umum kasus yang seperti ini diperlihatkan dalam teorema berikut.

Teorema I.2

Jika *A* matriks segitiga berukuran $n\times n$ maka nilai eigennya adalah a_{11}, a_{22} ,..., a_{nn} .

Pertanyaan yang sangat penting adalah : Apakah sebarang matriks persegi bisa diubah menjadi matriks segitiga ?
Jawabnya adalah Ya. Banyak penelitian yang telah dilakukan dengan tujuan untuk merubah sebarang matriks persegi menjadi matriks segitiga (untuk kasus tertentu diperoleh matriks "yang hampir segitiga").

Pada pembahasan berikut ini akan diperlihatkan contoh-contoh matriks yang yang hampir segitiga dan bagaimana cara mempartisinya sehingga memudahkan dalam menghitung nilai eigennya.

B. PEMBAHASAN

Saya akan mulai membangun konsep dengan memberikan beberapa contoh matriks berikut ini :

Contoh I.2

$$A=\begin{bmatrix}3&2&1&4\\0&3&1&5\\0&-1&-4&2\\0&3&1&-4\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}-9&2&1&4\\0&3&1&5\\0&-1&-4&2\\0&3&1&-4\end{bmatrix},$$

Perhatikan elemen-elemen dari matriks *A* dan *B*, yang membedakan hanya elemen pada baris pertama kolom pertama. Setelah dihitung menggunakan ekspansi kofaktor sepanjang baris pertama, ternyata salah satu nilai eigen dari matriks A adalah 3, sedangkan salah satu nilai eigen dari matriks B adalah -9.

Pertanyaannya, saat saya mengganti nilai elemen kolom pertama baris pertama dari matriks *A* atau B menjadi 6, apakah nilai ini merupakan nilai eigen dari matriks *A* atau *B*? Jawabannya Ya (Silahkan menghitung sendiri kalau ragu-ragu).

Kesimpulan pertama : Jika sebuah matriks dengan semua elemen pada kolom pertama bernilai nol (kecuali elemen pertama dari kolom tersebut), maka salah satu nilai eigen dari matriks tersebut adalah elemen baris pertama kolom pertama.

Selanjutnya, perhatikan matriks berikut

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 5 \\ -2 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Elemen-elemen pada matriks C dan D, yang membedakan hanya elemen pada baris keempat kolom keempat. Setelah dihitung maka diperoleh bahwa salah satu nilai eigen dari matriks *C* adalah -4 sedangkan matriks *D* adalah 7.

Kesimpulan kedua : Jika elemen baris terakhir dari sebuah matriks bernilai nol (kecuali untuk elemen terakhir baris tersebut) maka salah satu nilai eigen dari matriks tersebut adalah elemen terakhir baris tersebut.

Pertanyaan yang mungkin timbul, Bagaimana jika terjadi kasus seperti ini pada kolom kedua atau ketiga, ataupun baris kedua atau ketiga dst? Jawabannya : saya tidak bisa menerapkan kesimpulan yang sama. Ingat kembali konsep matriks segitiga dalam menghitung nilai eigen.

Contoh I.3

Contoh ini akan menggabungkan matriks *A* dan *D* pada contoh sebelumnya

$$E = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Dengan yakin saya bisa katakan bahwa 3 dan 7 adalah nilai eigen dari matriks *E*.
Agar meyakinkan maka saya akan perlihatkan hasil perhitungan sebagai berikut :

$$\lambda I - E = \begin{bmatrix} \lambda-3 & -2 & -1 & -4 \\ 0 & \lambda-3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & \lambda+4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-7 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$\det(\lambda I - E) = 0 + 0 + 0 + (\lambda-7)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -1 \\ 0 & \lambda-3 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda+4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-7)\left((\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 1 & \lambda+4 \end{vmatrix} + (-2)(0) + (-1)(0)\right)$$

$$= (\lambda-7)(\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 \\ 1 & \lambda+4 \end{vmatrix}$$

Persamaan polinomial $(\lambda-7)(\lambda-3)\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ 1 & \lambda+4\end{vmatrix}=0$ jelas memiliki akar-akar 3 dan 7.

Persamaan ini juga memperlihatkan bahwa dua nilai eigen yang lain dapat dihitung dari persamaan

$$\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1\\ 1 & \lambda+4\end{vmatrix}=0$$

Jika diselesaikan maka polinomial karakteristik $\lambda^2+\lambda-11=0$, yang mana akar-akarnya adalah 2.8541 dan -3.8541. Jadi secara lengkap nilai eigen dari matriks *E* adalah 7, 3, 2.8541 dan -3.8541.

Tinjau kembali matriks *E* dan saya akan coba partisi menjadi

$$E=\left[\begin{array}{c|ccc}3 & 2 & 1 & 4\\ \hline 0 & 3 & 1 & 5\\ 0 & -1 & -4 & 2\\ \hline 0 & 0 & 0 & 7\end{array}\right]$$

Nilai eigen dari matriks *E* diperoleh dari sub-matriks $E_1=[3]$, $E_2=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & -4\end{bmatrix}$, $E_3=[7]$.

Contoh I.4

Berikut ini saya berikan variasi matriks dengan partisinya untuk menghitung nilai eigen :

$A=\left[\begin{array}{cc|cc}-2 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 3 & 1 & 2\\ \hline 0 & 0 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 4 & 1\end{array}\right]$ diperoleh sub-matriks $A_1=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 0 & 3\end{bmatrix}$; $A_2=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}$.

Nilai eigen dari matriks *A* adalah -2 dan 3, sedangkan yang sisanya dapat dihitung dari sub matriks A_2.

$B=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 1 & 1\\ -3 & 3 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ matriks ini tidak bisa dipartisi karena elemen baris keempat kolom pertama tidak sama dengan nol.

Kesimpulan dari pembahasan di atas dapat diperlihatkan lewat teorema berikut:

Teorema I.3

Jika matriks $A\in M_n(\mathbb{R})$ dapat dipartisi menjadi

$$A=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ 0 & A_3\end{bmatrix}$$

maka nilai eigen dari matriks *A* diperoleh dengan menghiutng nilai eigen sub-matriks A_1 dan sub-matriks A_3.

Catatan :
Jika matriks A_1 atau A_3 berukuran 1×1 maka ini adalah nilai eigen dari matriks A.

Bukti dari Teorema I.3 akan diberikan dalam penulisan berikutnya. Bentuk partisi dalam teorema ini mengambil bentuk matriks segitiga atas. Hal lain yang perlu diperhatikan dari Teorema I.3 adalah matriks A_1 dan A_3 juga dapat dipartisi jika memenuhi bentuk yang diinginkan. Hal ini dapat dilihat pada contoh I.3 di atas.

$E=\begin{bmatrix}3 & 2 & 1 & 4\\ 0 & 3 & 1 & 5\\ 0 & -1 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 7\end{bmatrix}$ dipartisi dan diperoleh sub-matriks :

$$E_1=\begin{bmatrix}3\end{bmatrix},\ E_2=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\end{bmatrix} \text{ dan } E_3=\begin{bmatrix}3 & 1 & 5\\ -1 & -4 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, matriks E_3 dapat dipartisi dan diperoleh sub-matriks

$$E_4=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & -4\end{bmatrix},\ E_5=\begin{bmatrix}5\\ 2\end{bmatrix} \text{ dan } E_6=\begin{bmatrix}7\end{bmatrix}.$$

Namun yang akan digunakan untuk menghitung nilai eigen dari matriks E hanya sub-matriks :

$$E_1=\begin{bmatrix}3\end{bmatrix},\ E_4=\begin{bmatrix}3 & 1\\ -1 & -4\end{bmatrix} \text{ dan } E_6=\begin{bmatrix}7\end{bmatrix}$$

C. PENUTUP

Mohon maaf jika terdapat kekurangan ataupun kesalahan. Saran dan kritik dapat dikirim ke email saya : bernypebo@yahoo.co.id